19. Messbarkeit und Lebesgue-Mass

Zur praktischen Berechnung von Integralen ist der von Riemann eingeführte Integralbegriff sehr gut geeignet. Er hat allerdings zwei Schwächen:

- Es gibt keine gut handhabbaren Sätze zur Vertauschung von Integral und Grenzwert. Wir haben zwar Satz 9.10 aus Analysis I, aber der erfordert die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge, und die ist oft nicht gegeben.
- In der Quantenmechanik braucht man Hilberträume integrierbarer Funktionen. Die lassen sich mit dem Riemannschen Integralbegriff nicht konstruieren.

Der Grund dafür ist, dass zu wenige Funktionen riemannintegrierbar sind. Die Lösung ist ein neuer Integralbegriff, mit dem mehr Funktionen integriert werden können.

Beim Riemann-Integral für eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist die zentrale Idee, das Intervall zu partitionieren $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ und Zwischensummen zu bilden

$$\sum_{j=1}^{N} f(x_j)(x_j - x_{j1})$$

mit der Hoffnung, dass die Zwischensummen gegen einen Wert (nämlich das Integral) konvergieren, wenn die Feinheit der Partition gegen Null geht.

Die neue Idee ist, den Wertebereich zu partitionieren. Man fragt sich z.B.: Wie groß ist das Volumen (‘Maß‘) der Urbildmenge zu dem Intervall $[y, y+\varepsilon]$, d.h. aller Punkte x, für die $f(x)$ im Intervall $[y, y+\varepsilon]$ liegt. Dann summiert man entsprechend auf.

Dazu wollen wir zunächst Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ ein Maß (Volumen) zuordnen. Das wichtigste Maß auf $\mathbb{R}^n$ ist das sogenannte Lebesgue-Maß, und wir werden es im folgenden konstruieren. Gerade für Anwendungen der Physik, wo man z.B. auch Punktmassen betrachten möchte, ist es aber günstig, noch weitere Maße betrachten zu können. Daher entwickeln wir parallel die abstrakte Theorie.

Messbarkeit.

19.1. Definition. Eine Familie $\mathcal{R}$ von Teilmengen von X heißt σ-Algebra, falls gilt:

(i) $X \in \mathcal{R}$.

(ii) Mit A und B liegt auch $A \setminus B$ in $\mathcal{R}$.

(iii) Aus $A_j \in \mathcal{R}, j = 1, 2, \ldots$ folgt, dass $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$.

Beachte: Aus der de-Morgan-Identität

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = A_1 \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_1 \setminus A_j)$$

folgt dann, dass auch $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{R}$.

In diesem Fall heißt X messbarer Raum und die Elemente von $\mathcal{R}$ messbare Mengen. Ohne Eigenschaft (i) spricht man von einem σ-Ring. Gilt außerdem (iii) nur für endliche Vereinigungen, so spricht man von einem Ring.

19.2. Definition. Eine Mengenfunktion auf einem Ring $\mathcal{R}$ ist eine Abbildung

$$\varphi : \mathcal{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\},$$

wobei φ weder $\equiv \infty$ noch $\equiv -\infty$ sein soll und nur einer der Werte $\pm\infty$ von φ angenommen wird. Die Funktion φ heißt additiv, falls

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

für alle $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \cap B = \emptyset$. Sie heißt abzählbar additiv auf einem σ-Ring, falls

$$\varphi\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(A_j) \tag{1}$$

für jede Folge $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkter Mengen mit $\bigcup A_j \in \mathcal{R}$.

19.3. Bemerkung. Die linke Seite in 19.2(1) ändert sich bei Umordnung nicht. Ist daher die rechte Seite konvergent, so ist sie automatisch absolut konvergent; ist sie nicht konvergent, so divergieren die Partialsummen entweder gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$.

19.4. Lemma. *Ist φ additive Mengenfunktion, so gilt*

(a) $\varphi(\emptyset) = 0$.

(b) $\varphi(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi(A_j)$ *für paarweise disjunkte Mengen* A_j.

(c) $\varphi(A_1 \cup A_2) + \varphi(A_1 \cap A_2) = \varphi(A_1) + \varphi(A_2)$

(d) *Ist* $\varphi(A) \geq 0$ *für alle* $A \in \mathcal{R}$, *so gilt* $A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow \varphi(A_1) \leq \varphi(A_2)$.

(e) $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B)$ *falls* $B \subseteq A$ *und* $|\varphi(B)| < \infty$.

Beweis. Leicht. ◁

19.5. Satz. *Es sei φ abzählbar additive Mengenfunktion auf dem Ring $\mathcal{R}$, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$, und*

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$$

mit $A_j, A \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\lim_{j\to\infty} \varphi(A_j) = \varphi(A).$$

Beweis. Setze $B_1 = A_1$ und $B_j = A_j \setminus A_{j-1}, j = 2, 3, \ldots$ Dann gilt $B_i \cap B_j = \emptyset\ \forall i \neq j, A_n = \bigcup_{j=1}^{n} B_j$ und $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \varphi(A_n) &= \sum_{j=1}^{n} \varphi(B_j) \\ \varphi(A) &= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j). \end{aligned}$$

◁

Das Lebesgue-Maß.

19.6. Definition.

(a) Ein Intervall in $\mathbb{R}^n$ ist eine Menge der Form

$$\{x \in \mathbb{R}^n : a_j \leq x_j \leq b_j\} \tag{1}$$

mit geeigneten $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $a_j \leq b_j, j = 1, \ldots, n$. Statt „$\leq$“ kann stets auch „$<$“ stehen. Insbesondere betrachten wir die leere Menge als Intervall.

(b) Eine Menge, die sich als endliche Vereinigung von Intervallen schreiben läßt, heißt elementar. Mit $\mathcal{E}$ bezeichnen wir die Menge der elementaren Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

(c) Einem Intervall I wie in (1) ordnen wir das Maß

$$m(I) = \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j)$$

zu – unabhängig davon, ob dort „$<$“ oder „$\leq$“ steht. Ist A die disjunkte Vereinigung der Intervalle $I_1, \ldots, I_k$, so setzen wir

(2) $$m(A) = \sum_{j=1}^{k} m(I_j).$$

19.7. Lemma.

(a) *Die Differenz $I_1 \backslash I_2$ und der Durchschnitt $I_1 \cap I_2$ zweier Intervalle sind in disjunkte Intervalle zerlegbar.*

(b) *Jede elementare Menge ist disjunkte Vereinigung endlich vieler Intervalle.*

(c) *$\mathcal{E}$ ist ein Ring, jedoch kein σ-Ring.*

(d) *Kann man $A \in \mathcal{E}$ auf zweierlei Weise als Vereinigung von Intervallen darstellen, so ergibt sich in 19.6(2) dennoch derselbe Wert.*

(e) *m ist additiv auf $\mathcal{E}$.*

Beweis. (a) Wegen $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$ brauchen wir nur Differenzen zu betrachten. Davon selbst überzeugen.

(b) Folgt wegen $I_1 \cup I_2 = (I_1 \setminus I_2) \cup (I_2 \setminus I_1) \cup (I_1 \cap I_2)$ aus (a).

(c) Ring klar (Vereinigung ohnehin, Differenz nach (a).

Wieso kein σ-Ring? Betrachte die Folge $(0, \ldots, 0), (1, \ldots, 1), (2, \ldots, 2), \ldots$ in $\mathbb{R}^n$. Dies ist eine abzählbare Vereinigung von Intervallen ($a_j^k = b_j^k = k$), die nicht als endliche Vereinigung darstellbar ist.

(d) Ist $E \in \mathcal{E}$ und sind $E = \bigcup I_j = \bigcup J_k$ zwei Zerlegungen in disjunkte Intervalle, so schreibe $E = \bigcup_{j,k}(I_j \cap J_k)$. Indem wir diese Vereinigung zerlegen, erhalten wir eine eine weitere Darstellung von E als Vereinigung disjunkter Intervalle. Damit ist nur zu zeigen, dass für ein Intervall I der Wert von $m(I)$ gleich bleibt, wenn wir I in Teilintervalle zerlegen. Um das zu sehen, können wir I ggf. entlang sämtlicher vorkommender Intervallgrenzen der Teilintervalle weiter zerlegen: Hat I die Grenzen a und b ($\in \mathbb{R}^n$), so finden wir für jedes j Partitionen $a_j = t_{j0} < \ldots t_{jk_j} = b_j$ so dass I die Vereinigung der $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n$ Intervalle mit Grenzen an den t_{jl} ist. Nun folgt die Behauptung aus dem Distributivgesetz.

(e) folgt aus der Definition. ◁

19.8. Definition. Eine nicht-negative additive Mengenfunktion φ auf $\mathcal{E}$ heißt regulär, falls folgendes gilt: Für jedes $A \in \mathcal{E}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existieren $F, G \in \mathcal{E}$ mit F abgeschlossen, G offen, $F \subseteq A \subseteq G$ und

(1) $$\varphi(G) - \varepsilon \leq \varphi(A) \leq \varphi(F) + \varepsilon.$$

19.9. Lemma. *Die obige Funktion m ist regulär.*

Beweis. Ist A ein Intervall, so sind F, G leicht gefunden: Hat A die Grenzen a und b, so wähle für $\delta > 0$

$$F = \{a_j + \delta \leq x_j \leq b_j - \delta\} \text{ und } G = \{a_j - \delta < x_j < b_j + \delta\}.$$

(Ist $a_j = b_j$ und steht in der Definition von A hier kein '$<$', so wähle in dieser Komponente für F $a_j \leq x_j \leq b_j$; steht hier ein '$<$', so ist $A = \emptyset$, und wir wählen $F = \emptyset$.) Ist δ hinreichend klein, so gilt 19.8(1). Eine allgemeine Menge zerlegt man zunächst in disjunkte Intervalle.

19.10. Bemerkung. Es gibt andere reguläre Mengenfunktionen; die folgende Konstruktion kann man mit einem beliebigen additiven, regulären nichtnegativen μ machen, das auf $\mathcal{E}$ endlich ist.

19.11. Das äußere Maß. Es sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir setzen

$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{E}, \text{offen} \right\}.$$

Klar: $\mu^*(E) \geq 0 \ \forall E \subseteq \mathbb{R}^n, \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ falls $E_1 \subseteq E_2$. (1)

19.12. Satz.

(a) *Für $A \in \mathcal{E}$ gilt $\mu^*(A) = \mu(A)$, d.h. μ^* setzt μ fort.*

(b) *Ist $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$, so ist*

(1)
$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) \quad \text{“Subadditivität”}.$$

Beweis. (a) Wähle $A \in \mathcal{E}$ und $\varepsilon > 0$. Wegen der Regularität von μ existiert eine offene elementare Menge G mit $A \subseteq G$ und $\mu(G) \leq \mu(A) + \varepsilon$. Da $\mu^*(A) \leq \mu^*(G) \leq \mu(G)$, ergibt sich

(2)
$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Andererseits gibt es nach Definition von μ^* eine Folge offener elementarer Mengen $\{A_j\}$, so dass $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ und

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

Wiederum wegen der Regularität von μ existiert eine abgeschlossene elementare Menge F mit $F \subseteq A$ und $\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$. F ist auch beschränkt, also kompakt. Da $F \subseteq A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, existieren $A_1, \ldots, A_n$ mit $F \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Daher ist

(3)
$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_n) + \varepsilon \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon.$$

Aus (2) und (3) folgt (a), da ε beliebig war.

(b) Ist $\mu^*(E_j) = +\infty$ für ein E_j, so ist die Aussage sicher wahr. Sei also $\mu^*(E_j) < \infty \ \forall j$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ finden wir nach Definition von μ^* elementare Mengen $\{A_{jk}\}_{k=1}^{\infty}$ mit

$$E_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{jk}) \leq \mu^*(E_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{jk}$ überdeckt E. Folglich ist

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{jk}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E_j) + \varepsilon.$$

◁

19.13. Definition.

(a) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\begin{aligned} S(A,B) &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad \text{„Symmetrische Differenz“} \\ d(A,B) &= \mu^*(S(A,B)). \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $A_j \to A$ falls $\lim_{j\to\infty} d(A_j, A) = 0$.

(c) Gibt es eine Folge elementarer Mengen $\{A_j\}$ mit $A_j \to A$, so nennen wir A endlich messbar. Wir schreiben $A \in \mathcal{M}_E(\mu)$.

(d) Ist A die abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, so heißt A messbar (Lebesgue-messbar, falls wir von der Mengenfunktion m in 19.6 ausgehen). Schreibe $A \in \mathcal{M}(\mu)$.

19.14. Lemma.

(a) $S(A,B) = S(B,A),\ \ S(A,A) = \emptyset$.

(b) $S(A,B) \subseteq S(A,C) \cup S(C,B)$

(c) $$\left.\begin{array}{r} S(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) \\ S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) \\ S(A_1\setminus A_2, B_1\setminus B_2) \end{array}\right\} \subseteq S(A_1,B_1)\ \cup S(A_2,B_2).$$

Beweis. (a) klar

(b) Folgt, weil $A\setminus B \subseteq (A\setminus C)\cup(C\setminus B)$ und $B\setminus A \subseteq (C\setminus A)\cup(B\setminus C)$.

(c) Es ist
$$(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2) \subseteq (A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2).$$
Dies liefert die erste Formel. Nun bezeichne für $E\subseteq\mathbb{R}^n$ mit E^c das Komplement $E^c = \mathbb{R}^n\setminus E \subseteq \mathbb{R}^n$. Dann folgt die zweite Formel, weil $S(A^c,B^c) = S(A,B)$ und daher $S(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) = S(A_1^c\cup A_2^c, B_1^c\cup C_2^c) \overset{\text{1. Ident.}}{\subseteq} S(A_1^c,B_1^c)\cup S(A_2^c,B_2^c) = S(A_1,B_1)\ \cup S(A_2,B_2)$. Die letzte Identität ergibt sich, weil $A_1\setminus A_2 = A_1\cap A_2^c$. ◁

19.15. Lemma.

(a) $d(A,B) = d(B,A)$, $d(A,A) = 0$.

(b) $d(A,B) \le d(A,C) + d(C,B)$.

(c) $$\left.\begin{array}{r} d(A_1\cup A_2, B_1\cup B_2) \\ d(A_1\cap A_2, B_1\cap B_2) \\ d(A_1\setminus A_2, B_1\setminus B_2) \end{array}\right\} \le d(A_1,B_1)\ + d(A_2,B_2).$$

Beweis. (a) ist klar

(b) $\mu^*(S(A,B)) \overset{19.11(1),19.14(b)}{\le} \mu^*(S(A,C)\cup S(C,B)) \overset{19.12(b)}{\le} \mu^*(S(A,C)) + \mu^*(S(C,B))$.

(c) Folgt analog aus 19.14(c) mit 19.11(1) und 19.12(b). ◁

19.16. Bemerkung. Aus $d(A,B) = 0$ folgt nicht immer $A = B$ (wähle z.B. A, B als nichtleere Mengen mit Maß Null). Daher liefert d keine Metrik auf den Teilmengen von $\mathbb{R}^n$.

Man kann jedoch auf den Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ eine Relation definieren durch $A\sim B \Leftrightarrow d(A,B) = 0$. Aus Lemma 19.15 folgt dann, dass dies eine Äquivalenzrelation ist und dass d auf den Äquivalenzklassen eine Metrik definiert.

19.17. Lemma. *Sind $\mu^*(A)$ und $\mu^*(B)$ nicht beide unendlich, so ist*
$$|\mu^*(A) - \mu^*(B)| \le d(A,B).$$

Beweis. Ist oBdA $0 \le \mu^*(B) \le \mu^*(A)$, so ist nach 19.15
$$d(A,\emptyset) \le d(A,B) + d(B;\emptyset),$$
somit
$$\mu^*(A) \le d(A,B) + \mu^*(B).$$

Dies liefert die Behauptung. ◁

19.18. Satz. *Die Menge $\mathcal{M}(\mu)$ ist eine σ-Algebra, und μ^* ist abzählbar additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.*

Beweis. Schritt 1: $\mathcal{M}_E(\mu)$ ist ein Ring, und μ^* ist additiv auf $\mathcal{M}_E(\mu)$.
Es seien A und B endlich μ-messbar. Wir wählen elementare Mengen A_k und B_k mit $A_k \to A$ und $B_k \to B$. Dann folgt nach 19.15(c) und 19.17

$$A_k \cup B_k \to A \cup B \tag{1}$$
$$A_k \cap B_k \to A \cap B \tag{2}$$
$$A_k \setminus B_k \to A \setminus B \tag{3}$$
$$\mu^*(A_k) \to \mu^*(A), \tag{4}$$

und es gilt $\mu^*(A) < \infty$, da $d(A, A_k) \to 0$. (Man sieht hier: Die endlich messbaren Mengen haben endliches Maß.) Wegen (1) und (3) bildet $\mathcal{M}_E(\mu)$ einen Ring. Wir wissen aus 19.4(c), dass

$$\mu(A_k) + \mu(B_k) = \mu(A_k \cup B_k) + \mu(A_k \cap B_k).$$

Sind A und B disjunkt so erhalten wir wegen (4) und Satz 19.12(a) die Additivität für $k \to \infty$:

$$\mu^*(A) + \mu^*(B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A \cup B) + \mu^*(\emptyset) = \mu^*(A \cup B).$$

Schritt 2: μ^* ist abzählbar additiv auf $\mathcal{M}(\mu)$.
Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$. Dann ist A eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, also auch eine abzählbare Vereinigung *disjunkter* endlich messbarer Mengen: Ist nämlich $A = \cup A_j$ so setze $B_j = (A_1 \cup \ldots \cup A_j) \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{j-1})$, $j \geq 2$, und es ist $A = \cup B_j$ (disjunkt) mit $B_j \in \mathcal{M}_E(\mu)$ nach Schritt 1. Nach Satz 19.12(b) wissen wir, dass

$$\mu^*(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j).$$

Andererseits gilt $A \supseteq B_1 \cup \ldots \cup B_j$, somit ist (nach der Bemerkung in 19.11 und wegen der Additivität von μ^* auf den endlich messbaren Mengen):

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(B_1 \cup \ldots \cup B_j) = \mu^*(B_1) + \ldots + \mu^*(B_j), \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Es folgt, dass

$$\mu^*(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j). \tag{5}$$

Ist nun $\mu^*(A) < \infty$, so gilt für $C_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, dass

$$d(A, C_k) = \mu^*\left(\bigcup_{j=k+1}^{\infty} B_j\right) \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu^*(B_j) \longrightarrow 0.$$

Folglich gilt $C_k \to A$. Da C_k in $\mathcal{M}_E(\mu)$ liegt, d.h. Grenzwert einer Folge elementarer Mengen ist, gilt dies auch für A. Also liegt auch A in $\mathcal{M}_E(\mu)$. Die endlich messbaren Mengen sind also genau die messbaren Mengen mit endlichem Maß.

Nun erhalten wir rasch die abzählbare Additivität: Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$ und $A = \cup A_k$ für eine Folge (A_k) disjunkter Mengen in $\mathcal{M}(\mu)$. Gilt $\mu^*(A_k) < \infty$ für alle k, so gilt $A_k \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle k. In diesem Fall folgt (5) (mit $B : j$ in der Rolle von A_j) wie oben gezeigt. Ist hingegen für ein k das Maß $\mu^*(A_k)$ unendlich, so gilt (5) trivialerweise.

Schritt 3: $\mathcal{M}(\mu)$ ist ein σ-Ring.
Es seien $A_k \in \mathcal{M}(\mu)$, $k = 1, 2, \ldots$. Dann ist jedes A_k eine abzählbare Vereinigung endlich messbarer Mengen, somit auch $\cup A_k$ (abzählbare Vereinigungen abzählbarer Mengen sind abzählbar).

Nun seien $A, B \in \mathcal{M}(\mu)$ die abzählbaren Vereinigungen der endlich messbaren Mengen A_k bzw. B_j. Dann ist

$$A_k \cap B = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A_k \cap B_j),$$

und somit $A_k \cap B$ in $\mathcal{M}(\mu)$. Ferner ist $\mu^*(A_k \cap B) \leq \mu^*(A_k) < \infty$. Daher ist $A_k \cap B \in \mathcal{M}_E(\mu)$ für alle k, also auch $A_k \setminus B = A_k \setminus (A_k \cap B)$ nach Schritt 1. Es folgt, dass $A \setminus B = \cup(A_k \setminus B) \in \mathcal{M}(\mu)$.

Da $\mathbb{R}^n$ als abzählbare Vereinigung von Intervallen messbar ist, ist $\mathcal{M}(\mu)$ auch eine σ-Algebra. $\lhd$

19.19. Bemerkung.

(a) Der obige Beweis zeigt, dass $\mathcal{M}_E(\mu) = \{A \in \mathcal{M}(\mu) : \mu(A) < \infty\}$.

(b) Wie erwähnt, lässt sich die obige Konstruktion mit jeder additiven, regulären nichtnegativen Mengenfunktion μ auf $\mathbb{R}^n$ durchführen, die auf $\mathcal{E}$ endlich ist. Für $A \in \mathcal{M}(\mu)$ schreibt man einfach $\mu(A)$ statt $\mu^*(A)$. Man hat also die Abbildung μ von $\mathcal{E}$ auf $\mathcal{M}(\mu)$ fortgesetzt.

19.20. Definition. Eine Menge X heißt Maßraum, falls zu X eine σ-Algebra $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X existiert und eine σ-additive nichtnegative Mengenfunktion μ, die auf $\mathcal{M}$ definiert ist. Die Elemente von $\mathcal{M}$ heißen dann messbare Mengen. Man schreibt $\mathcal{M}(\mu)$, wenn man das Maß betonen möchte.

Geht man speziell von der in 19.6 definierten Funktion m aus, so nennt man die Mengen in $\mathcal{M}(m)$ die Lebesgue-messbaren Mengen und m das Lebesgue-Maß.

Frage: Welche Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sind messbar? Erste Antwort:

19.21. Lemma.

(a) *Jede offene Menge ist messbar.*

(b) *Jede abgeschlossene Menge ist messbar.*

(c) *Jede Menge, die sich aus offenen Mengen durch die Operationen "Vereinigung", "Durchschnitt", "Komplement" darstellen lässt, ist messbar. Dabei kann man abzählbar viele Vereinigungen bzw. Durchschnitte bilden.*

Beweis. (a) Jede offene Menge in $\mathbb{R}^n$ ist abzählbare Vereinigung offener Intervalle (wieso?) und daher messbar.

(b) Als Komplement einer offenen Menge ist eine abgeschlossene Menge messbar.

(c) Dies gilt, weil die offenen Mengen zu $\mathcal{M}(\mu)$ gehören und $\mathcal{M}(\mu)$ als σ-Ring unter den angegebenen Operationen abgeschlossen ist. $\lhd$

19.22. Borel-Mengen. Die aus 19.21(c) resultierenden Mengen nennt man die Borel-Mengen. Etwas präziser definiert man die Familie der Borel-Mengen als die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Mengen enthält.

Unabhängig davon, von welcher Mengenfunktion wir ausgegangen sind, sind die Borel-Mengen messbar. Im Allgemeinen bilden sie jedoch eine echte Teilmenge von $\mathcal{M}(\mu)$.

19.23. Lemma. *Es sei $A \in \mathcal{M}(\mu)$ und $\varepsilon > 0$.*

(a) *(vgl. 19.8) Es existieren eine offene Menge G und eine abgeschlossene Menge F mit*

$$F \subseteq A \subseteq G; \quad \mu(G \setminus A) < \varepsilon; \quad \mu(A \setminus F) < \varepsilon.$$

(b) *Es existieren Borel-Mengen $\tilde{G}$ und $\tilde{F}$ mit*

$$\tilde{F} \subseteq A \subseteq \tilde{G}; \quad \mu(\tilde{G} \setminus A) = 0 = \mu(A \setminus \tilde{F}).$$

Beweis. (a) Nach Definition von μ^* (vgl. 19.11) existiert eine offene Menge G mit $\mu^*(G \setminus A) < \varepsilon$. Da beide Mengen messbar sind, können wir statt μ^* auch μ schreiben. Ebenso existiert zu $\mathbb{R}^n \setminus A$ eine offene Menge G' mit $(\mathbb{R}^n \setminus A) \subseteq G'$ und $\mu^*(G' \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) < \varepsilon$. Mit $F = \mathbb{R}^n \setminus G'$ ergibt sich die Behauptung.

(b) folgt aus (a), indem wir $\varepsilon = 1/j$ wählen, F_j und G_j bestimmen und $F = \cup F_j$, $G = \cap G_j$ setzen. ◁

19.24. Bemerkung. Es gibt Teilmengen von $\mathbb{R}^n$, die nicht Lebesgue-messbar sind. Mehr dazu in der Übung.

19.25. Definition. Eine Menge N mit $\mu^*(N) = 0$ heißt Nullmenge.

19.26. Lemma.

(a) *Jede Nullmenge ist endlich messbar.*

(b) *Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind Nullmengen.*

(c) *Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen.*

Die Nullmengen bilden also einen σ-Ring.

Speziell für das Lebesgue-Maß gilt ferner:

(d) *Ein einzelner Punkt ist eine Nullmenge; somit sind auch alle abzählbaren Mengen Nullmengen.*

(e) *Es sei $k \in \{1, \ldots, n\}$, $c \in \mathbb{R}$, und $U = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k = c\}$. Dann ist U eine Nullmenge.*

Beweis. (a) Wir betrachten die 'Folge' $E_j = \emptyset$ für alle j ($\emptyset$ ist elementare Menge!). Dann gilt $d(N, E_j) = \mu^*((N \setminus E_j) \cup (E_j \setminus N)) = \mu^*(N) = 0$. Also konvergiert E_j gegen N.

(b) Folgt aus abzählbarer Additivität.

(c) Klar, da $\mu * (E) \leq \mu^*(N)$.

(d) Klar: $\{x\}$ ist sogar Intervall mit Maß 0.

(e) U ist abzählbare Vereinigung von Intervallen vom Maß 0. ◁

19.27. Bemerkung.

(a) Die Borelmengen bilden zwar nach 19.21(c) eine Teilmenge der Lebesgue-messbaren Mengen. Allerdings lässt sich jede Lebesgue-messbare Menge nach 19.23(b) zwischen zwei Borel-messbare Mengen einschachteln, deren Maß gleich ist. Die Lebesgue-messbaren Mengen ergeben sich also als Vereinigungen von Borel-messbaren Mengen mit Lebesgue-Nullmengen.

(b) Es gibt auch in $\mathbb{R}$ überabzählbare Nullmengen, z.B. die Cantormenge. Mehr dazu in der Übung.